

第2章 極限と微分法

キーワード

極限、微分、微分係数（導関数）、増分と微分、関数の微分、関数の極大、極小、停留点、変曲点

2.1 極限

数の並びが与えられているとする。

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$$

ここで、 n は自然数である。いま $n \rightarrow \infty$ としたとき、 a_n がある有限な一つの値に近づくと

き、つまり $a_n \rightarrow \alpha$ なら、この数の並びは極限を持つといい、記号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と書く。例として、

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}$$

では、 n をどんどん大きくすると $\frac{1}{n}$ はゼロに近づく。つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{である。}$$

このように、番号 n が無限に大きくなるとき、 n で表現される項がある有限な値 α に限りなく近づくと、この項の値は α に収束するといい、 α を**極限值**という。ここで注意したいのは、**極限值**というのは**近づく目標であって、その値になるということではない**。例えば、上記の例では n は無限大 (∞) という値を取るのではなく、いくらでも大きくなるとい

うことであり、このとき $\frac{1}{n}$ はゼロという値を取るのではない。あくまでもゼロに近づくのである。それでは、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1}$$

はどうであろうか。この場合、分母と分子が共に ∞ になってしまうので、このままでは極限值があるのかどうか分からない。ところで、上式を変形して

$$\frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

とすれば $n \rightarrow \infty$ のとき 2 に限りなく接近することがわかる。つまり、極限值が存在して、それは 2 である。ところで、 n は番号であるから自然数しかとれないが、 $\frac{1}{n}$ の代わりに $\frac{1}{x}$ を考え、 x を実数とするとどうであろうか。ここで、 x は自然数に限定しないで、任意の実数を取りながら限りなく大きな値になっていくと ($x \rightarrow \infty$) $\frac{1}{x}$ の値はやはり限りなくゼロに

近づく。この場合、関数 $\frac{1}{x}$ の値は限りなくゼロに近づくという。ところで、もし、 x が負の値で限りなく大きくなると、この関数値はどうなるだろうか。この場合、限りなくゼロに近づくが、常に負の値を取り続ける。つまり、ゼロに近づくにしても正の値を取りつづけるか、負の値を取り続けるか、見定める必要がある。さらに付け加えるならば、 x が限りなく大きくなると言っても、 x の値の取り方次第で異なる極限值に収束するのでは困る。

ここで、極限值が α であるということと、関数の値が α であるということは意味が異なるので注意する必要がある。例えば、 $2x$ という x の関数を考える。ここで、 x が限りなく 1 に近づくと $2x$ の値は限りなく 2 に近づく。ところで、この関数は x として 2 という数値を代入できて関数の値は 2 である。この場合、 x が限りなく 1 に近づくときの $2x$ の極限值というのは、 $2x$ が近づく目標値であって $2x$ の値ではない。この関数はたまたま運が良く、 $x=1$ という値に対して 2 という値を持っている。したがって、近づく目標と、そこでの関数値が一致している。しかしながら、関数によっては近づく目標値 ($x \rightarrow \alpha$ のときの $f(x) \rightarrow \beta$) が有限な値であっても、そのときの関数値 $f(\alpha)$ が求められないことがある。

次の関数の極限值を求めなさい。

$$\begin{array}{lllll} 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} & 2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} & 3. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 1}{x-1} & 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x-1} & 5. \lim_{x \rightarrow 0} e^x \sin x \\ 6. \lim_{x \rightarrow 0} e^x \cos x & 7. \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sin x & 8. \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} & 9. \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} & 10. \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} \\ 11. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} & 12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} & 13. \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} & 14. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x} \end{array}$$

次に、微分学で重要な次の極限を証明しなさい。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{および} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\text{.....} = e$$

ここで、(2)の n は自然数である。

2.2 微分法

今、関数 $y = f(x)$ について、変数 x が x から $x + \Delta x$ だけ変化したときの $f(x)$ の平均の変化率を考える。これは

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

と書けるが、 y の変化量に対する x の変化量の比として $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ と書ける。これは、図 2.1 に示すように点 (x, y) と $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ とを結ぶ直線の傾きとなっている。ここで、 Δx を 0 に近づけると、この直線はある直線に近づく。この近づく目標となる直線はグラフ $y = f(x)$ の点 (x, y) における接線である。あるいは、別の言い方をすればこれが接線の定義である。

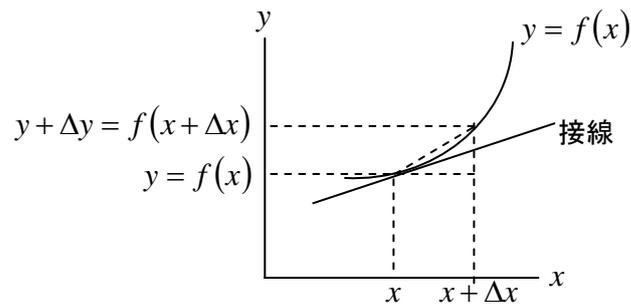


図2.1平均の傾き

それでは、具体的な関数について、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を求めてみる。関数 $y = f(x) = x^2$ について、

まず平均の傾きは $\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ である。ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ と

したとき、この傾きは $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$ となり、確かに存在する。これを一般的に

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.2)$$

と書き、ディーワイディーエックスと呼び、関数 $f(x)$ の x についての微分係数、あるいは導関数という。

多くの有名な関数について微分係数が求められている。微分係数は簡単には

$$(x^2)' = 2x$$

のようにダッシュをつけて表すことが多い。代表的な関数の微分係数を示す。

$$(c)' = 0 \quad (2.3) \quad (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) \quad (2.4)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \quad (2.5) \quad \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f(x)^2} \quad (2.6)$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (2.7) \quad (\sin x)' = \cos x \quad (2.8)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (2.9) \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (2.10)$$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \quad (2.11) \quad (\log_a x)' = \left(\frac{\log_e x}{\log_e a}\right)' = \frac{1}{x \log_e a} \quad (2.12)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2.13) \quad (a^x)' = a^x \log_e a \quad (2.14)$$

ここで、上述の微分係数の証明を与える。

$$(c)' = 0: \quad (y)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0$$

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x):$$

$$\begin{aligned} (f(x)+g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)+g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x)+g'(x) \end{aligned}$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x):$$

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2}.$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)} - \frac{g(x)}{f(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)f(x) - g(x)f(x+\Delta x)}{f(x+\Delta x)f(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)f(x) - g(x)f(x) - g(x)f(x+\Delta x) + g(x)f(x)}{f(x+\Delta x)f(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x+\Delta x)f(x)} \left\{ \frac{g(x+\Delta x)f(x) - g(x)f(x)}{\Delta x} - \frac{g(x)f(x+\Delta x) - g(x)f(x)}{\Delta x} \right\} \\
&= \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{f(x)^2}
\end{aligned}$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$: まず、 $(x+\Delta x)^n$ を 2 項定理で展開する。

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \right\} = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

$(\sin x)' = \cos x$:

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x
\end{aligned}$$

$$(\cos x)' = -\sin x :$$

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \end{aligned}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} :$$

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} :$$

$$\begin{aligned} (\log_e x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_e(x + \Delta x) - \log_e(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x}{\Delta x} \log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2.3 合成関数の微分係数

今、関数 $z = (2x+1)^2$ を x について微分することを考える。ここで、 $y = 2x+1$ とおくと

$z = y^2$ となり z は y の関数として表せる。これは、関数 z は関数 y を通して変数 x に依存

しているとみなせる。このような関数関係を**合成関数**という。関数が合成関数として表せる場合、その微分係数を求める作業が単純化される場合が多い。合成関数の例として、

$$\begin{aligned} z &= \sin(\omega t + \varphi) = \sin(y) ; y = \omega t + \varphi && z \text{ は } y \text{ を通して } t \text{ の関数} \\ z &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{y} ; y = 1+x^2 && z \text{ は } y \text{ を通して } x \text{ の関数} \\ z &= e^{\alpha t + \beta} = e^y ; y = \alpha t + \beta && z \text{ は } y \text{ を通して } t \text{ の関数} \end{aligned}$$

今、独立変数 x の関数として従属変数 z が関数関係 $z = f(g(x))$ で与えられるとする。変数 x が x から Δx だけ変化したとき、従属変数 z は z から Δz だけ変化したとする。つまり、

$$z + \Delta z = f(g(x + \Delta x))$$

$$\text{これより、 } z \text{ の変化量 } \Delta z \text{ は } \Delta z = f(g(x + \Delta x)) - z = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$$

と書ける。ここで、関数 $g(x)$ を別の従属変数 y で表す。

$$y = g(x)$$

そうすれば $g(x + \Delta x) - g(x) = \Delta y$, $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta y = y + \Delta y$ と書けるので

$$\Delta z = f(y + \Delta y) - f(y) \quad \text{となり、}$$

Δx の変化に応じた z の変化である Δz と Δx の比 $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ は次のように書ける。

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta x} = \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ここで、式の意味を確認する。 Δx は独立に変化する変数 x の任意の変化量である。 Δy はこの Δx に応じた y の変化量である。この Δy に応じた z の変化量が Δz である。このように、3種類の変数は連動して変化することを念頭において $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取る。上式より

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \text{つまり、} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{2.15}$$

となる。この結果を言葉で表すならば、先に y を x で微分しておいて、 z を y で微分したものに掛けることである。 z を y で微分した結果の式で、 y のところに x の式を代入し、 z を x で微分した結果を x で表すのが通常である。例えば、 $z = (2x+1)^2$ において $y = 2x+1$ とおくと、

$$\frac{dz}{dy} = 2y \quad \text{および} \quad \frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{より} \quad \frac{dz}{dx} = 2y \times 2 = 4(2x+1)$$

として z の x についての微分係数が求まる。これは、カッコを展開して x について微分する手間を省く。上記の、他の3種類の関数について x 微分係数を求めなさい。

ここで、下記に合成関数の微分係数の例を扱う。

$y = \sin^2 x$ の微分係数： $u = \sin x$ とおけば $y = \sin^2 x = u^2$ と表せるので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 2u \cos x = 2 \sin x \cos x \quad \text{と求まる。}$$

$y = \sin(x^2)$: $u = x^2$ とおけば $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 2x \cos u = 2x \cos(x^2)$

$y = \log_e(x + \sqrt{1+x^2})$:

$$\begin{aligned} \left(\log_e(x + \sqrt{1+x^2}) \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + (\sqrt{1+x^2})' \right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) 式の関係は直線状に分布した電荷が作り出すポテンシャルを求める際に登場する。

関数 $u(x)$ と $v(x)$ を用いた関数 $y = u^v$ の微分係数を求める。

$y = u^v = e^{v \log u}$ と書き直し、 $v \log u = t$ とおくと $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$ であることから、

$\frac{dt}{dx} = \frac{dv}{dx} \log u + v \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ を用いて、

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{dv}{dx} \log u + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right) = u^v \left(\frac{dv}{dx} \log u + \frac{v}{u} \frac{du}{dx} \right) \quad (2.17)$$

が求まる。

ここで、具体的に $u(x) = x$ および $v(x) = x$ の場合、 $y = x^x$ となり、この微分係数は

$$y' = x^x (\log x + 1) \quad (2.18)$$

となる。

2.4 逆関数の微分係数

ある関数 $f(x)$ の逆関数を $g(x)$ としたとき、 $g(x)$ についての微分係数は、関数 $f(x)$ の微分係数を用いて表すことができ、逆関数の微分係数を求める際に威力を発揮する。ここで、 $f'(x)$ と $g'(x)$ の関係を導く。

まず、逆関数の意味を

$$y_0 = f(x_0) \leftrightarrow x_0 = g(y_0) \quad (2.19)$$

として再確認する。

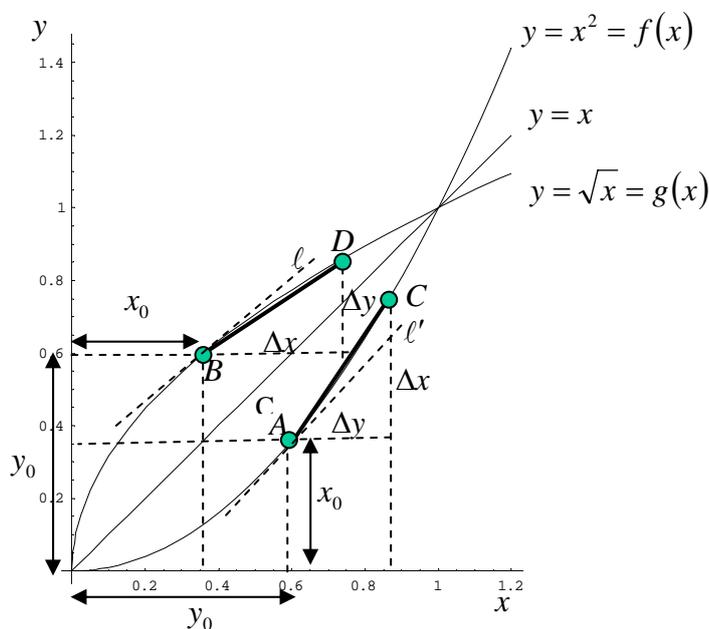


図2.2 逆関数の微分法

図 2.2 に示すように、独立変数の値 x_0 に対する $g(x_0)$ の値を y_0 とし、 x の変化量 Δx に対する $g(x)$ の変化量を Δy とする。逆関数の定義によれば、 $x_0 = f(y_0)$ であり、関数 $g(x)$ 上の B 点 (x_0, y_0) と関数 $f(x)$ 上の A 点 (y_0, x_0) は直線 $y = x$ について対象な位置にある。さらに、同じように、 $x_0 + \Delta x = f(y_0 + \Delta y)$ であるので C 点と D 点も対象な位置にある。 x が値 x_0 から $x_0 + \Delta x$ まで変化する場合の関数 $g(x)$ における平均の変化率は

$$\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (2.20)$$

であり、線分 BD の傾きを与える。ところで、関数 $f(x)$ の $x = y_0$ における線分 AC の傾きは

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

であるが、これは(2.20)で与えられる線分 BD の傾きの逆数となっている。つまり、

$$\text{BD の傾き} = 1 / (\text{AC の傾き})$$

である。ここで、極限 $\Delta x \rightarrow 0$ をとると線分 BD は関数 $g(x)$ の B 点における接線 l に接近

し、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は $\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0}$ つまり逆関数の B 点における微分係数あるいは接線の傾きを与えるが、

この極限においては、線分 AC は元関数 $f(x)$ 上の A 点 (y_0, x_0) における接線 l' に接近し、

AC の傾きは l' の A 点における傾き、あるいは微分係数 $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y_0}$ となる。線分 BD と AC の

傾きは互いに逆数の関係であるので、結局、逆関数 $g(x)$ の B 点における微分係数は元関数 $f(x)$ の A 点における微分係数の逆数として与えられることになる。つまり、

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{1}{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=y_0}} \quad (2.21)$$

ここに、

$$y_0 = g(x_0) \quad (2.22)$$

という関係を得る。ここで、 x_0 は x として取れる定義域内の任意の値なので、 x_0 の代わりに x としてよい。これを使えば、逆関数の微分係数は元の関数の微分係数を作って、その逆数を作ればよいことになり、計算が大変簡単になる。次にいくつかの例を見てみる。この幾何学的な意味を理解するために図 2.2 において関数 $f(x)$ に A 点で接する接線と $g(x)$ に B 点で接する接線を見ると、両者は直線 $y = x$ に対して対象になっている。これは、逆関数の形は $y = x$ に対して元関数の対象になっていることから当然である。したがって、式(2.21)、(2.22)が成り立つことが理解される。

$y = f(x) = x^2$ の逆関数の一つである $y = g(x) = \sqrt{x}$ の微分係数を求める。

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\frac{df}{dx}\Big|_{\sqrt{x}}} = \frac{1}{\frac{d(x^2)}{dx}\Big|_{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$y = a^x$ の微分係数を求める。この関数は $y = \log_a x$ の逆関数であることに注意し、

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x \log_e a} \quad \text{を用いて} \quad \frac{d}{dx}(a^x) = \frac{1}{\frac{d(\log_a x)}{dx}\Big|_{a^x}} = a^x \log_e a \quad \text{となる。特に}$$

$a = e$ (自然対数の底) の場合は $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ である。

次に逆関数の例として $y = \text{Arc sin } x$ の微分係数を求める。この関数は $y = \sin x$ の逆関数であるから、

$$\frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d(\sin x)}{dx}\Big|_{\text{Arc sin } x}} = \frac{1}{\cos(\text{Arc sin } x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\text{Arc sin } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (2.23)$$

と求まる。ここで、 $y = \text{Arc sin } x$ の値の範囲を $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$: 主値に取ったために

$\cos(\text{Arc sin } x)$ として正の値を取った。

同様に、次の微分係数も求められる。これらはちょっと複雑な積分を求めるのに有用である。

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2.24) \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (2.25)$$

$$(\text{arc cot } x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (2.26)$$

2.5 陰関数の微分係数

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

を満たす (x, y) の集合は楕円を描く。この x と y の値は互いに独立に任意の値を取ることはできず、例えば y は x の関数として表される。上式は y を x の関数として間接的に(陰に)表しているので y を x の陰関数と考えることができる。この方程式の両辺を x で微分すると、

y は x の関数であることを考えて次の結果を得る。

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

ここで、 y の微分係数はまだ具体的にわからないので $\frac{dy}{dx}$ と書いた。

これから $\frac{dy}{dx}$ について求めると $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ と表せる。この表現では y がそのまま入っ

ているが、もちろん y を x で表してここに代入しても良い。ただ、 $\frac{dy}{dx}$ は曲線の接線の傾きを与えるので、例えば楕円上の点 (x, y) における接線の傾きは、 x と y の値をここで求めた表現に直接代入できるので便利である。

問 この楕円の例で、 $\frac{dy}{dx}$ を x だけで表しなさい。

2.6 関数の微分

関数 $y = f(x)$ において、独立変数 x の任意な変化 Δx を dx と書いて x の微分ということがある。 dx と微分係数 $f'(x)$ との積

$$f'(x)dx = dy \quad (2.27)$$

を従属変数 y の、あるいは関数 $f(x)$ の微分という。微分とは量であり、微分するというのは微分係数を求める手続きのことで区別しなければならない。ここで、 dy と Δy とは等しくないことに注意する。 Δy はあくまでも Δx あるいは dx に対応した関数値の変化分である。これに対して、微分 dy は関数 $f(x)$ に x の位置で引いた接線上での dx に対応した変化分である。図 2.3 を参照してその違いを認識されたい。

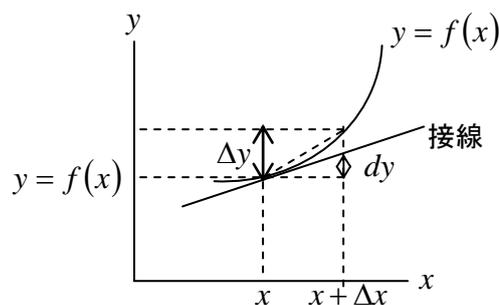


図2.3微分と増分

例として、 $y = x^2$ という関数を考える。これに対しては $y' = 2x$ なので $dy = 2xdx$ として微分 dy が与えられる。逆に、微分 dy が $dy = 2xdx$ として与えられたなら、微分係数は $\frac{dy}{dx} = 2x$ として求まる。物理学への応用では微分 dy を物理的な意味に基づく考察で求め、微分係数を導き、微分方程式を解くことが頻繁に行われる。ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限においては Δy は dy に収束する。

例として、質量 m [kg] の物体が z 軸下方を向く重力の作用で運動する場合を考える。物体の位置は z 座標で与えるとする。時間を t [s] とし、速度を v (時間の関数) とすれば、時間の微分 (微小時間) dt 間における位置の変化、つまり変位は近似的に微分 dz で与えられる。この微分は (変位 = 速度 \times 時間) より

$$dz = vdt$$

と書けるので z と t の関係を与える微分方程式

$$\frac{dz}{dt} = v$$

が得られる。ここで、 dt は有限であるのでそれに対応した位置の変化分は Δz であるが、 dt が十分に小さいという条件の下でこれを dz で近似した。今のような物理量の微分量どうしの関係を物理的考え方に基づいて求めるのは頻繁に行われる。

さらに、加速度を a [m/s²] とすると速度と時間の微分 ; dv と dt の関係として

$$dv = a dt$$

が得られ、これから微分方程式

$$\frac{dv}{dt} = a$$

が得られる。

次にいくつかの微分の関係を与える。

$$d(cf(x)) = cdf(x) = cf'(x)dx, \quad \text{ここで、} c \text{ は定数} \quad (2.28)$$

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))' dx = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = g(x)df + f(x)dg \quad (2.29)$$

$$d\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' dx = \left(\frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)}\right) dx = \frac{f(x)dg - g(x)df}{f^2(x)} \quad (2.30)$$

2.7 高階の微分係数

関数 $y = f(x)$ についての微分係数 $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ はそれ自身が独立変数 x の関数である。したがって、 $f'(x)$ をさらに x について微分することができ、記号 $f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ で表し、

2 階の微分係数、あるいは 2 階の導関数と呼ぶ。 n 階の導関数はこの表記法を使えば

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dots \frac{dy}{dx}$$

のように記述する。

例として、独立変数を時間 t とし、自由落下する質点の任意の時刻 t における z 座標が

$$z = -\frac{1}{2}gt^2$$

で与えられるとき、 z の t についての 1 階、2 階、および 3 階微分係数は

$$\frac{dz}{dt} = -gt \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad \frac{d^3z}{dt^3} = 0$$

となる。

問 二つの関数の積について、 n 階の微分係数はライプニッツの公式で与えられる。ライプニッツの公式を証明しなさい。

$$y = f(x)g(x)$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f^{(n)}(x)g(x) + \frac{n}{1!} f^{(n-1)}(x)g^{(1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}(x)g^{(2)}(x) + \dots + f(x)g^{(n)}(x) \quad (2.31)$$

2.8 関数（グラフ）の解析

微分係数を用いて関数で与えられるグラフの解析を行う。1 階の微分係数 $f'(x)$ はグラフの x における接線の傾きを与える。2 階の微分係数 $f''(x)$ は接線の傾きの変化率を与える。 $f'(x) > 0$ のときは接線の傾きは正であり、右上がりとなる。 $f'(x) < 0$ では接線の傾きは負であり、右下がりとなる。 $f'(x) = 0$ を与える x ではこの関数の接線の傾きは 0 であり、水平となる。この場合、グラフの挙動は 3 種類考えられる。それはちょうど山の頂上(極大)か、谷底(極小)か、棚壇(停留点)のように見える部分である。

2 階の微分係数については、 $f''(x) > 0$ では接線の傾きが増大しつつある状況、 $f''(x) < 0$ では接線の傾きが減少しつつあり、 $f''(x) = 0$ の点で $f''(x)$ の符号が変わる場合は、接線の

傾きが増大から減少へ、あるいはその逆で減少から増大へ変化する場所であり、グラフの**変曲点**と言われる。さらに、座標軸を切る点の x 座標を求め、 $x \rightarrow \pm\infty$ での関数の振る舞いを解析することでグラフのおおよその形状がわかる。

次のグラフの形状をスケッチしなさい。

$$y = x^2 + x + 1 \qquad y = x^3 + 3x^2 + x + 1$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{a}} \quad (\text{マックスウエルの速度分布})$$

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{光の吸収スペクトル、散乱断面積}) \qquad y = \frac{1-x}{1+x^2} \quad (\text{光の分散})$$